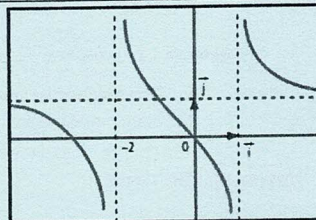


**Exercices – Séquence n° 3 – FONCTIONS (I) :****limites, comparaison, opérations**

|                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Contenus</b>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Limite finie ou infinie d'une fonction en <math>+\infty</math>, en <math>-\infty</math>, en un point.</li> <li>• Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.</li> <li>• Limites faisant intervenir des fonctions de référence étudiées en Première : puissances entières, racine carrée, exponentielle.</li> <li>• Limites et comparaison : théorème de comparaison, théorème des gendarmes.</li> <li>• Composée de deux fonctions, notation <math>v \circ u</math>.</li> <li>• Composition des limites en contexte.</li> <li>• Opérations sur les limites.</li> <li>• Théorème des croissances comparées des fonctions puissances entières et exponentielle.</li> </ul> |
| <b>Capacités</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer dans des cas simples la limite d'une fonction en <math>\pm\infty</math>, en un point en utilisant les limites usuelles, les opérations, les théorèmes de comparaison ou des gendarmes, les opérations, le théorème des croissances comparées ou en levant l'indétermination éventuelle.</li> <li>• Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                         |

**COMPÉTENCES :****Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Définition, interprétation graphique****Exercice 1** [Re-Co]

Conjecturer les limites de la fonction  $h$  représentée dans le repère ci-contre et préciser les asymptotes éventuelles à sa courbe représentative.

**Exercice 2** [Re-Co]

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction  $f$ .

- 1) Lire puis interpréter graphiquement chacune des limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Donner le signe de  $f$  sur  $D_f$ .
- 3) Dans un repère du plan, tracer, à main levée, une courbe susceptible de représenter la fonction  $f$ .

|        |           |      |           |           |
|--------|-----------|------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $1$       | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-3$      | $0$  | $+\infty$ | $0$       |

**Exercice 3** [Re-Ra-Co]

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{3x+1}{x}$

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 2) Démontrer cette conjecture par la définition.

**Exercice 4** [Re-Ra-Co]

Soit  $h$  la fonction définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ .

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de  $h$  en  $-1$ .
- 2) Démontrer cette conjecture par la définition.
- 3) Interpréter graphiquement cette limite.

**Exercice 5** [Ra-Re-Co]

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Dans un repère orthonormé :

- $C$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ;
  - $d$  est la droite d'équation  $x = 1$ .
- **Affirmation 1 :**  $f$  n'est pas définie en 1, donc  $d$  est asymptote à  $C$ .
  - **Affirmation 2 :** Si  $d$  est asymptote à  $C$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ .
  - **Affirmation 3 :** Si  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , alors  $d$  est asymptote à  $C$ .
  - **Affirmation 4 :** Si  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ , alors  $d$  est asymptote à  $C$ .

**Exercice 6** [Ra-Ca-Co]

- 1) On considère les fonctions suivantes :  $f : x \mapsto x^2$ ,  $g : x \mapsto \sqrt{x}$  et  $h : x \mapsto x - 4$ .
  - a. Calculer  $g \circ h(13)$ ,  $h \circ f(-2)$  et  $f \circ h \circ g(4)$
  - b. Expliciter les fonctions composées suivantes en précisant leur ensemble de définition :
 

|                |                 |                  |                 |                        |
|----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------------|
| i. $h \circ f$ | ii. $f \circ h$ | iii. $h \circ g$ | iv. $f \circ f$ | v. $f \circ h \circ g$ |
|----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------------|
- 2) Déterminer deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que  $f = v \circ u$  et préciser l'ensemble de définition de  $f$  :
 

|                       |                                |                           |                            |
|-----------------------|--------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| a. $f(x) = (x - 3)^2$ | b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | c. $f(x) = \sqrt{3x - 1}$ | d. $f(x) = (x - 2)e^{x-2}$ |
|-----------------------|--------------------------------|---------------------------|----------------------------|
- 3) Soient  $m : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$  et  $p : x \mapsto \frac{1}{|x + 1| - 3}$ 
  - a. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions  $m$  et  $p$ .
  - b. Écrire  $m$  et  $p$  comme composées de fonctions de référence.

**Exercice 7** [Ra-Ca-Co]

Soient  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty ; 3]$  par  $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$

et  $g$  la fonction définie sur  $[2 ; +\infty[$  par  $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ .

- 1) Calculer  $(f \circ g)(2)$  et  $(g \circ f)(2)$ .
- 2) Montrer que, pour tout  $x \in [2 ; +\infty[$ ,  $(f \circ g)(x) = x$ .
- 3) Montrer que, pour tout  $x \in ]-\infty ; 3]$ ,  $(g \circ f)(x) = x$ .
- 4) Est-ce que, dans cet exemple,  $g \circ f = f \circ g$  ?

## Opérations, composition, comparaison, croissances comparées

**Exercice 8** [Ra]

Sans chercher à déterminer les limites, préciser, dans chaque cas, s'il s'agit ou non d'une forme indéterminée.

| Limite de ... | $x \mapsto x^2 + x + 1$ | $x \mapsto \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(2x + 5)$ | $x \mapsto \frac{-2}{x+1}$ | $x \mapsto \frac{3x-4}{x^2+1}$ | $x \mapsto \frac{2-x}{\sqrt{x^2+1}}$ |
|---------------|-------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| en $-\infty$  |                         |                                                    |                            |                                |                                      |
| en $+\infty$  |                         |                                                    |                            |                                |                                      |

**Exercice 9** [Ra-Re-Co]

Déterminer les limites des fonctions suivantes en justifiant, puis interpréter graphiquement, si possible. On vérifiera les résultats à l'aide de la calculatrice.

$$f: x \mapsto \frac{1+x}{2-x} \text{ en } 2 ; \quad g: x \mapsto \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} \text{ en } +\infty ; \quad h: x \mapsto x - \sqrt{x^2+1} \text{ en } +\infty ; \quad i: x \mapsto \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \text{ en } 9 ;$$

$$j: x \mapsto \frac{2-x}{x^2-1} \text{ en } -1 \text{ (à droite)} ; \quad k: x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} \text{ en } 2 ; \quad l: x \mapsto \frac{-x^2+x+12}{2x^2+5x-3} \text{ en } -3 ;$$

**Exercice 10** [Ra-Ca-Co]

Déterminer, en justifiant, les limites des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1) f: x \mapsto \sqrt{2+x+e^{-x}} \text{ en } -\infty & 2) g: x \mapsto \frac{e^{2x+1}}{2x+1} \text{ en } +\infty & 3) h: x \mapsto xe^{2-3x} \text{ en } -\infty \\ 4) k: x \mapsto (e^{2x} - 7x^3 + 1)^5 \text{ en } +\infty & 5) l: x \mapsto e^{\frac{-2}{x-3}} \text{ en } 3^- & 6) m: x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{4-x}} \text{ en } -\infty \end{array}$$

**Exercice 11** [Re-Ra]

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}$

- 1) Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur la calculatrice puis conjecturer sa limite en  $-\infty$ .
- 2) Démontrer la conjecture.

**Exercice 12** [Ra-Ca-Co]

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{2}x + \sin(3x)$

- 1) Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) \geq \frac{1}{2}x - 1$ .
- 2) En déduire la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 3) Étudier la parité de  $g$  puis en déduire la limite de  $g$  en  $-\infty$ .

**Exercice 13** [Re-Ra-Ca-Co]

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[2; +\infty[$  par :  $h(x) = \frac{3x + \sin(x)}{x-1}$ .

- 1) Démontrer que pour tout  $x \geq 2$ , on a :  $|h(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$ .
- 2) En déduire la limite de  $h$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement cette limite.

**Exercice 14** [Ra-Ca-Co]

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + \cos x}{2x^2 - x \sin x}$

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 2) Étudier la parité de  $f$  puis en déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

**Exercice 15** [Ch-Ra-Ca-Co]

Dans cet exercice, on va lever une indétermination en utilisant une nouvelle méthode.

- 1) a. Conjecturer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .  
 b. Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ;  $a$  un réel de  $I$  et  $h$  un réel tel que  $a + h$  appartienne à  $I$ .  
 Dans le cas où  $f$  est dérivable en  $a$ , rappeler ce que vaut  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .  
 c. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .
- 2) Par un raisonnement analogue, déterminer les limites suivantes :  
 a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x} - 3}{x}$ .  
 b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$ .  
 c.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$ .

**Exercice 16** [Ra-Ca-Co]

$m : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{x-1}\right)$  en  $-\infty$  ;  $n : x \mapsto \sqrt{\sin(2x)}$  en  $\frac{\pi}{4}$  ;  $p : x \mapsto e^{\frac{-2}{x-3}}$  en 3 (à gauche) ;  
 $q : x \mapsto \frac{e^x - 2}{e^x + 3x}$  en  $+\infty$  ;  $r : x \mapsto e^{-x}(x^2 + 2x - 5)$  en  $+\infty$  ;  $s : x \mapsto x^4 e^{-x} + \frac{x^3 - 2}{e^x}$  en  $+\infty$  ;  
 $t : x \mapsto \frac{x^2 + \sin(x)}{x+1}$  en  $+\infty$  ;  $u : x \mapsto \frac{1}{x \cos(x)}$  en  $0^+$  et en  $0^-$  ;  $v : x \mapsto x e^{-x^2}$  en  $+\infty$ .

**Problèmes****Exercice 17** [Ra-Ca-Co]

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 1 + x e^{-x}$

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - x + e^x$ .  
 a. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser son tableau de variations.  
 b. En déduire le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis montrer que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = e^{-x} g(x)$ .
- 4) En déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 5) Démontrer que la droite  $T$  d'équation  $y = 2x + 1$  est tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 0.
- 6) Étudier alors la position relative de la courbe  $C_f$  et de la droite  $T$ .

**Exercice 18** [Re-Ra-Ca-Co]

Soit  $f$  une fonction dont le tableau de variations est donné ci-contre.  
On appelle  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.  
On précise de plus que  $f(0) = 0$ .

|         |           |                |           |           |
|---------|-----------|----------------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$            | $+$       | $-$       |
| $f(x)$  | $1$       | $\frac{1}{3}$  | $+\infty$ | $1$       |

**Partie A - En interprétant le tableau donné ci-contre :**

- 1) Préciser l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
- 2) Donner l'équation réduite de l'asymptote horizontale  $d_1$  et de l'asymptote verticale  $d_2$  à  $C_f$ .
- 3) Donner les coordonnées du point A de  $C_f$  où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
- 4) On sait, de plus, qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \neq 1$  :  $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ 
  - a. Démontrer que :  $a = 1$ .
  - b. Déterminer les valeurs des réels  $b$  et  $c$  sachant qu'ils sont solutions du système : (S)  $\begin{cases} -b + c = -1 \\ -\frac{2}{3}b + \frac{4}{9}c = -\frac{4}{3} \end{cases}$

**Partie B -**

- 5) Vérifier que, pour tout réel  $x \neq 1$  :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$
- 6) Justifier alors le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 7) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $\Delta$  à  $C_f$  au point B d'abscisse 0 puis préciser la position de la courbe  $C_f$  par rapport à la droite  $\Delta$ .
- 8) Tracer alors les droites  $d_1, d_2, \Delta$  puis la courbe  $C_f$ .

**Exercice 19** [Re-Ra-Ca-Co] D'après Bac, Amérique du Nord mai 2014

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 6e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$ .  
On note  $C_f$  sa courbe représentative et  $D$  la droite d'équation  $y = x - 3$  dans un repère orthogonal du plan.

**Partie A - Positions relatives de  $C_f$  et  $D$** 

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - (x - 3)$ .

- 1) Justifier que pour tout réel  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .
- 2) La courbe  $C_f$  et la droite  $d$  ont-elles un point en commun ? Justifier.

**Partie B - Étude de la fonction  $g$** 

On note M le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $C_f$  et N le point d'abscisse  $x$  de la droite  $d$ .  
On s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

- 1) Justifier que pour tout réel  $x$  de  $[0; +\infty[$ , la distance MN est égale à  $g(x)$ .
- 2) On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$  sur  $[0; +\infty[$ . Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , calculer  $g'(x)$ .
- 3) Montrer que la fonction  $g$  a un maximum sur  $[0; +\infty[$  que l'on déterminera.  
En donner une interprétation graphique.

**Exercice 20** [Re-Ra-Ca-Co]**Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire  $g$** 

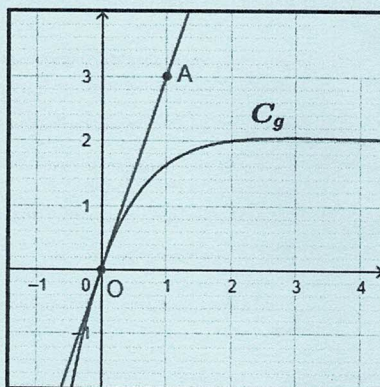
Soit  $g$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et telle que, pour tout réel  $x$  :  $g(x) = xe^{-x} + a(1 - e^{-x})$  où  $a$  est un réel.

- 1) Montrer que, pour tout réel  $x$  :  $g'(x) = e^{-x}(1 + a - x)$
- 2) Ci-contre est graphiquement représentée la fonction  $g$  dans un repère du plan.

La droite (OA) où O est l'origine du repère et A le point de coordonnées (1; 3) est la tangente à la courbe représentative  $C_g$  de la fonction  $g$  au point d'abscisse 0.

Lire graphiquement la valeur de  $g'(0)$ . Expliquer brièvement.

- 3) Des deux questions précédentes, déduire que  $a = 2$ .
- 4) Étudier alors les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 5) Étudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 6) Calculer  $g(0)$  puis en déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B – Étude de la fonction  $f$** 

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan d'unité graphique 2 cm et  $\Delta$  la droite d'équation  $y = 2x - 2$ .

- 7) Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 8) Étudier la position relative de  $C_f$  et  $\Delta$ .
- 9) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = g(x)$ .
- 10) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis le tableau **complet** de variation de la fonction  $f$ .
- 11) Existe-t-il des points de la courbe  $C_f$  en lesquels la tangente à  $C_f$  est parallèle à  $\Delta$ ? Justifier.

**Pour réviser****Exercice 21** [Ra-Re-Co]

Déterminer, en justifiant, les limites suivantes et en donner, lorsque cela est possible, une interprétation graphique.

$$f(x) = \frac{5x^2 + 3}{x^3 - 2x^2}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow -1} f(x). \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow -3} g(x). \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x).$$

$$j(x) = x + 2\sin(x). \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x). \quad k(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x).$$

$$l(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{-2x^2 - x + 1}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow -1} l(x). \quad m(x) = \frac{e^x - e}{x - 1}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow 1} m(x).$$

$$n(x) = e^x - x - e. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow +\infty} n(x). \quad p(x) = e^{x^2 - 2x}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x).$$

$$q(x) = \sqrt{x}e^{-x}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x). \quad r(x) = xe^{3x + 4}. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow -\infty} r(x).$$

**Exercice 22** [Ra-Re-Co] N°116 p73**Exercice 23** [Ra-Re-Co] N°117 p73**Pour aller plus loin****Exercice 24** [Ch-Ra-Ca-Co] N°125 p74**Exercice 25** [Ch-Ra-Ca-Co] N°130 p75